

distincts. Son membre de droite est un objet considéré comme ayant une existence objective dans le cadre de la mécanique bohémienne tandis que son membre de gauche est une distribution de probabilité dont le sens physique reste relativement obscur (le hasard quantique) et controversé. D'ailleurs la relation (194) se révèle fausse dans beaucoup de situations comme lors d'une mesure : la distribution  $\rho$  se réduit à l'état observé alors que la fonction d'onde  $\psi$  du système et de l'appareil de mesure obéit à l'équation de Schrödinger et continue de représenter l'éventail pondéré de toutes les mesures possibles.

L'application du second postulat conduit à donner une pondération ( $|\psi(\mathbf{x}, 0)|^2$ ) à chaque trajectoire bohémienne calculée c-à-d., à respecter une densité équivalente de positions initiales correspondant à la distribution initiale avec pour conséquence immédiate que les probabilités quantiques seront reproduites :

"Quand une expérience est répétée  $M$  fois, les positions initiales  $\{\mathbf{x}^j(t_0)\}$  ( $j = 1, \dots, M$ ) d'un ensemble de trajectoires  $\{\mathbf{x}^j(t)\}$ , associées à la même fonction d'onde  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , doivent être distribuées de façon à satisfaire à  $R^2(\mathbf{x}, t_0) = |\psi(\mathbf{x}, t_0)|^2$  c-à-d. que le nombre de trajectoires de cet ensemble se trouvant dans l'élément de volume  $[\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}]$  au temps initial  $t_0$  doit être proportionnel à  $R^2(\mathbf{x}, t_0) = |\psi(\mathbf{x}, t_0)|^2$ ." [29]

Le second postulat est aussi formulé ou justifié au départ de la fonction d'onde  $\Psi$  de *tout l'Univers*. L'Univers a une fonction d'onde et comme le remarque très bien John Bell, nous sommes dans cette réalisation de l'Univers et il n'y en a pas d'autre pour recommencer l'expérience (!) et construire la distribution  $\rho$  des Univers. Maintenant, lors d'une expérience, nous travaillons avec un sous-ensemble de l'Univers c.-à-d. un système auquel correspond un sous-ensemble de l'espace de configuration de l'Univers. Le second postulat indique alors que la règle de Born s'applique à ce sous-ensemble (voir aussi : La fonction d'onde conditionnelle § 10.4)

Une autre vue de cette situation est qu'un système n'est jamais complètement isolé du reste de l'Univers et que les interactions correspondantes conduisent la distribution de ses réalisations à suivre la distribution d'équilibre<sup>25</sup>. Nous illustrerons ce point de vue sur le second postulat au paragraphe § 13.1 par un exemple très didactique.

## 9 Les opérateurs

### 9.1 Les valeurs moyennes des opérateurs

Adapté de [29]<sup>26</sup>.

#### A propos des opérateurs hermitiens en mécanique bohémienne

La représentation de l'évolution temporelle des systèmes en mécanique bohémienne au moyen de trajectoires dérivant de l'équation de Schrödinger rend inutile l'utilisation d'opérateurs hermitiens pour décrire les observables dans le processus de mesure projectives

<sup>25</sup>. David Bohm a publié en 1954 une version de sa mécanique dans laquelle des fluctuations sont introduites.

<sup>26</sup>. Avec aussi quelques remarques venant de [18]

alors qu'ils sont indispensables dans sa description *orthodoxe*. Par suite les difficultés associées à l'effondrement de la fonction d'onde dans le processus de mesure s'évanouissent à leurs tours (voir § 11). *Seulement* (!), inclure, en plus de celle du système à mesurer, une description *complète* de l'appareil de mesure dans le formalisme de Schrödinger et par suite dans la mécanique bohémienne est une tâche en général irréalisable compte-tenu du nombre de degrés de liberté du système macroscopique provenant de l'appareil du dispositif de mesure (voir aussi § ??).

"How many degrees of freedom are needed to describe a measuring apparatus? The answer is too many degrees of freedom." [29]

Ainsi, un opérateur hermitien agissant sur la fonction d'onde et offrant les résultats de mesures et leurs probabilités reste une procédure mathématique bienvenue du point de vue pratique, même au niveau conceptuel, en mécanique bohémienne, il n'est plus nécessaire.

### Valeur moyenne et probabilités de résultats de mesures

Nous allons décrire ici comment la mécanique bohémienne reproduit les résultats des mesures obtenues habituellement au moyen des opérateurs hermitiens en mécanique quantique *traditionnelle*.

Considérons  $M$  répétitions d'une mesure sur des systèmes identiquement préparés et décrits par une fonction d'onde  $\psi$ . Soit  $P_i$ , la fréquence de la réalisation de la valeur mesurée  $a_i$  associée à une observable  $\hat{A}$  et supposons que l'on a observé  $J$  valeurs distinctes. La valeur moyenne de ces mesures donne une approximation de l'espérance mathématique de l'observable  $\langle \hat{A} \rangle$  et est

$$\langle \hat{A} \rangle_{approx} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^J P_i a_i \quad (195)$$

### Valeur moyenne à partir de la fonction d'onde et des opérateurs

Un nombre infini de répétitions conduirait à la valeur exacte donnée par

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (196)$$

### Valeur moyenne locale d'un opérateur

Les observables contiennent généralement des termes de position et d'impulsion qui sont traduits au moyen du principe de correspondance en  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$ . En représentation de position, nous avons  $\hat{x} \rightarrow x$  et  $\hat{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  (cf. § 3.4).

L'espérance mathématique de l'observable  $\hat{A}$  s'écrit alors

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \hat{A}(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x, t) dx \quad (197)$$

En mécanique bohémienne, nous pouvons utiliser une "**valeur moyenne locale**" d'un opérateur  $\hat{A}$ ,  $A_B(x)$ , qui est calculée en  $x$  que l'on pondérera par  $R^2(x)$  dans le calcul de  $\langle \hat{A} \rangle$

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} R^2(x) A_B(x) dx \quad (198)$$

$A_B(x)$  est définie par

$$A_B(x) = \text{Real} \left( \left[ \frac{\psi^*(x, t) \hat{A}(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x, t)}{\psi^*(x, t) \psi(x, t)} \right]_{\psi(x, t) = R(x, t) \exp(i/\hbar S(x, t))} \right) \quad (199)$$

dans laquelle la normalisation  $\psi^*(x, t) \psi(x, t)$  est explicitée. L'expression à l'intérieur de (199) peut être un nombre complexe. Pour définir la valeur moyenne locale, la partie réelle (199) de est prise puisque les valeurs propres d'un opérateur hermitien (les résultats de mesures) sont des nombres réels.

En mécanique bohmiennne, les valeurs moyennes locales d'une observable sont interprétées comme étant une véritable ("actual") propriété de la particule (du système) - voir aussi § 9.2-. Pour une particule (un système), la relation (??) est ainsi une définition valide d'une propriété physique associée à un opérateur donné et un état. Elle permet de donner un sens physique aux opérateurs en visualisant leurs effets sur les états des systèmes.

## Valeurs moyennes au départ des trajectoires bohmiennes

Quand, l'équation (198) est utilisée pour calculer l'espérance mathématique d'une observable  $\hat{A}$  avec  $j = 1, \dots, M$  trajectoires, d'un point de vue pratique, il faut tenir compte du second postulat (§ 8.2) dans la distribution des positions initiales  $\{x^j(t_0)\}$  des trajectoires. Cela conduit à mettre  $R^2(x, t_0)$  sous la forme

$$R^2(x, t_0) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \delta(x - x^j[t_0]) \quad (200)$$

et donc, par suite de l'équivariance

$$R^2(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \delta(x - x^j[t]) \quad \forall t \quad (201)$$

La relation (198) devient alors

$$\langle \hat{A} \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M A_B(x^j[t]) \quad (202)$$

## Moyenne de la position

La moyenne de la position est donnée par

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) x \psi(x, t) dx \quad (203)$$

Nous avons

$$x_B(x) = x \quad (204)$$

et, dès lors,

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} R^2(x, t) x dx \quad (205)$$

### Moyenne de l'impulsion

La moyenne de l'impulsion est donnée par

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x, t) dx \quad (206)$$

Nous avons

$$p_B(x) = \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \quad (207)$$

qui conduit à

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} R^2(x, t) \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} dx \quad (208)$$

### Moyenne du potentiel classique $V$

La moyenne de  $V(x, t)$  est donnée par

$$\langle V \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) V(x, t) \psi(x, t) dx \quad (209)$$

Nous avons

$$V_B(x) = V(x, t) \quad (210)$$

qui conduit à

$$\langle V \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} R^2(x, t) V(x, t) dx \quad (211)$$

### Moyenne de l'énergie cinétique $T$

La moyenne de l'énergie cinétique *quantique*  $T(\mathbf{x}, t)$  est donnée à 3-D<sup>27</sup>

$$\langle T \rangle = \int \psi^* \frac{1}{2m} \left[ -i\hbar \vec{\nabla} \right]^2 \psi d\tau = \int \psi^* \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right] \psi d\tau \quad (212)$$

$$= \int R \exp \left( -\frac{i}{\hbar} S \right) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right] R \exp \left( \frac{i}{\hbar} S \right) d\tau \quad (213)$$

$$= \int R \exp \left( -\frac{i}{\hbar} S \right) \frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{\nabla} R \exp \left( \frac{i}{\hbar} S \right) + \frac{i}{\hbar} R \exp \left( \frac{i}{\hbar} S \right) \vec{\nabla} S \right] d\tau \quad (214)$$

$$= \int R \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \left( \vec{\nabla}^2 R + \frac{2i}{\hbar} \vec{\nabla} R \cdot \vec{\nabla} S + \frac{i}{\hbar} R \vec{\nabla}^2 S - \frac{1}{\hbar^2} R (\vec{\nabla} S)^2 \right) \right] d\tau \quad (215)$$

$$= \int R^2 \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\vec{\nabla}^2 R}{R} \right) d\tau - \frac{i\hbar}{2m} \int \vec{\nabla} (R^2 \vec{\nabla} S) d\tau + \int R^2 \left( \frac{1}{2m} (\vec{\nabla} S)^2 \right) d\tau \quad (216)$$

$$= \langle Q \rangle + \left\langle \frac{\mathbf{p}_{class}^2}{2m} \right\rangle \quad (217)$$

$$= \langle Q \rangle + \langle T_{class} \rangle \quad (218)$$

---

27.  $d\tau$  et  $d\sigma$  sont respectivement les éléments de volume et de surface dans ces calculs.

car dans

$$\int \vec{\nabla}(R^2 \vec{\nabla} S) d\tau = \oint R^2 \vec{S} d\vec{\sigma} \quad (219)$$

la surface extérieure considérée est celle de tout l'Univers et que donc aucun flux ne la traverse.

*La moyenne de l'énergie cinétique quantique est donc celle de l'énergie cinétique classique à laquelle est additionnée la moyenne du potentiel quantique.*

Nous en déduisons la valeur moyenne locale de l'opérateur énergie cinétique quantique

$$T_B = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\vec{\nabla}^2 R}{R} + \frac{1}{2m} (\vec{\nabla} S)^2 = Q + \frac{1}{2m} (\vec{\nabla} S)^2 \quad (220)$$

## 9.2 Valeurs moyennes locales et valeurs propres

Il faut insister sur le fait que les valeurs moyennes locales  $A_B(x)$  (??) ne sont pas, en général, des valeurs propres de l'observable associé  $\hat{A}$ . En général, les valeurs propres d'un opérateur ne dépendent pas de la position alors que  $A_B$  en dépend.

Nous allons présenter un exemple parlant et, de plus intéressant, montrant que les valeurs locales ne sont pas des valeurs propres : il s'agit du puit rectangulaire infini de potentiel à savoir deux murs séparés par une distance  $L$  qui confinent une particule.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, L] \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (221)$$

Les fonctions d'onde correspondantes sont données, entre les parois, par

$$\psi_n(x) = C_n \sin(n\pi x/L) \quad (222)$$

et zéro ailleurs (ou par une combinaison linéaire de celles-ci). Considérons un système décrit par (222) où  $C_n \in \mathbb{R}$  est une constante de normalisation. Cette fonction d'onde est à valeurs réelles et par suite  $S(x, t) \equiv 0$ . Ainsi l'impulsion locale bohmienne  $p_B = \frac{\partial S}{\partial x} \equiv 0$  (207) et il en va de même pour la valeur moyenne :  $\langle \hat{p} \rangle \equiv 0$ .

La relation (222) peut aussi s'écrire

$$\psi_n(x) = C'_n (\exp[ipx/L] - \exp[-ipx/L]) \quad (223)$$

à savoir une combinaison linéaire des fonctions  $\exp[ipx/L]$  et  $\exp[-ipx/L]$  qui sont elles-mêmes des fonctions propres de l'opérateur impulsion  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  avec pour valeurs propres respectivement  $a_{1n} = n\hbar\pi/L$  et  $a_{2n} = -n\hbar\pi/L$ . Pour chaque  $n$ , les 2 fonctions propres sont équiprobables. Par suite, nous retrouvons bien évidemment  $\langle \hat{p} \rangle \equiv 0$ .

Dans cet exemple, la vitesse et l'énergie cinétique de la particule sont nulles dans l'interprétation bohmienne et cela semble être en conflit avec l'interprétation de Copenhague pour laquelle l'impulsion, obtenue *lors d'une mesure*, devrait être soit  $n\hbar\pi/L$  ou  $-n\hbar\pi/L$  après effondrement de la fonction d'onde. Dans la façon de voir bohmienne, il faut fournir le détail du processus de mesure. Par exemple, on pourrait, en  $t_1$  enlever les murs qui confinent la particule et détecter celle-ci ensuite en  $t_2$  sur un détecteur éloigné de sa zone de confinement initiale ( $t < t_1$ ) et de la en déduire vitesse et impulsion. Le processus

non instantané de suppression des murs ferait évoluer la fonction d'onde initiale en deux paquets d'onde indépendants, une onde vide et une onde pleine. Finalement, l'onde pleine interagirait avec le détecteur. La description bohmiennne de la mesure ne nécessite pas d'effondrement de la fonction d'onde.

### 9.3 A propos du réalisme

Lorsque l'on aborde la littérature consacrée à la mécanique bohmiennne, on rencontre nombre de publications consacrées à la thématique du réalisme (ex. : [22], [26], [7], ...).

La théorie quantique *orthodoxe* déclare "qu'une mesure, en général, *ne révèle pas* une valeur *préexistante* de la propriété mesurée".

Dans la théorie de Bohm, il n'y a que deux choses : la particule qui est *toujours* localisée en une position précise et la fonction d'onde qui décrit sa dynamique (ses caractéristiques). Une emphase est aussi mise sur le fait que, in fine, c'est toujours une position qui est observée expérimentalement (que ce soit le point d'impact d'une particule sur un capteur, la position de l'aiguille d'un dispositif de mesure - avec l'extension moderne aux charges électriques d'un dispositif électronique -).

Se pose alors les questions de ce qui *réellement* est mesuré par un équipement de mesure, du lien entre un équipement de mesure et l'opérateur associé (le terme "observable" est même éventuellement rejeté) car, d'une part, le détail de l'opération de mesure n'est pas décrit (que se soit, le détail de toutes les interactions et/ou aussi de la transformation non unitaire conduisant à l'effondrement de la fonction d'onde<sup>28</sup> et, d'autre part, que l'on peut s'inventer autant d'opérateurs hermitiens que l'on souhaite sans pour autant que l'on soit *toujours* assuré de la possibilité théorique de pouvoir construire un équipement de mesure correspondant qui permettrait, en conséquence, de donner un sens physique à cet opérateur c-à-d. révéler une propriété du système ainsi *observé*. Finalement, quel est le lien entre la classe restreinte d'opérateurs utilisés en pratique dans la théorie (imposés par celle-ci) -voire de leurs combinaisons - ( $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{p}}$ , ...) et les interprétations physiques<sup>29</sup> qui leur sont données telles des "réminiscences" avec une grandeur classique, une propriété d'un objet ou d'un système (ex. un électron avec charge, position, vitesse, spin, ...) et, par suite, localisée au droit du système, ou une propriété de la fonction d'onde associée au système et à sa dynamique (par suite, pas forcément localisée mais effectivement décrite par la fonction d'onde)... .

*"Ce que cette théorie [la mécanique bohmiennne] rejette, c'est le 'réalisme naïf' à propos des opérateurs ou des observables - il s'agit d'amalgames diaboliques et confus entre les opérateurs auto-adjoints, les propriétés physiques et les valeurs observées. Comme mentionné plus tôt, les observables ne jouent aucun rôle dans la théorie ; ils arrivent au mieux, dans l'analyse statistique, en tant que comptes des résultats statistiques. En conséquence, ils ne sont les propriétés de rien. Les appeler 'propriétés contextuelles' des systèmes physique est simplement faux et induit des confusions supplémentaires"*<sup>30</sup>.

28. Problème inexistant chez Bohm - voir plus loin

29. Lorsque l'on "mesure" son spin, s'agit-il d'une propriété d'une particule ou s'agit-il de l'observation d'une position dictée par la dynamique issue de la fonction d'onde ?

30. - extrait traduit - op. cit. [22] se référant à [7]

"... Dans la mécanique bohmienne, par exemple, les mesures de positions simplement révèlent effectivement les positions pré-existantes des particules mais tout le reste est contextuel : la quantité de mouvement, le spin, l'énergie et tous les autres 'observables' non positionnels ne possèdent simplement pas de valeurs préexistantes révélées par les mesures correspondantes. ... Dans d'autres cas (comme dans le cas de la mesure du spin), les particules ne possèdent en aucune façon les propriétés correspondantes : ce n'est pas que la particule possède, avant mesure, des valeurs pour les composantes de son spin, valeurs qui différeront, en général, des composantes mesurées, mais que la particule ne possède pas de propriété comme le 'spin' (ni avant, ni pendant, ni après la mesure). Les 'propriétés de spin' adéquatement pertinentes résident ailleurs : à savoir dans l'interaction entre l'onde pilote de la particule et l'appareil spécifique de mesure (comme par ex. un dispositif de Stern et Gerlach) qui réalise la mesure. ..." <sup>31</sup>.

Le problème de l'interprétation se complique encore suite au fait que le  $(x, y, z)$ , apparaissant tant dans la fonction d'onde que dans la théorie de Bohm appartient à l'espace de configuration et non à *notre espace physique* à la  $\mathbb{R}^3$ , confusion rapidement présente avec une particule et moins avec plusieurs ( $N$ ) particules. Il y a alors débat si la physique (dont les trajectoires bohmienne) avec ses lois se déroule dans  $\mathbb{R}^3$  ou dans  $\mathbb{R}^{3N}$  auquel il faudrait éventuellement attribuer plus de *réalité* (nous restons ici dans le cadre non relativiste).

## 10 Mécanique bohmienne à plusieurs particules

### 10.1 Formalisme

Nous introduisons maintenant le formalisme pour les systèmes à plusieurs particules [18], [29].

Précédemment, nous n'avons considéré que le cas d'un système à une particule pour lequel nous imaginions calculer et analyser des trajectoires bohmienne avec  $M$  positions initiales ou encore les  $M$  répétitions d'une expérience (cf. 8.2), repérées par un indice supérieur  $j = 1, \dots, M$ . Nous n'avons évoqué la mesure que très superficiellement car, très concrètement, pour être mesuré, le système considéré doit interagir avec le dispositif de mesure et ainsi donc, au minimum, il faut deux particules : celle du système et celle du dispositif de mesure et, en pratique, le dispositif de mesure est constitué d'un très grand nombre de particules. En s'éloignant encore plus de cette idéalisation pour en rejoindre une autre, il faudrait en fait considérer la fonction d'onde de tout l'Univers divisé en trois sous-ensembles, celui de la particule du système, celui des particules du dispositif de mesure et enfin, le reste des particules de l'Univers (!). Nous reviendrons sur ces idées plus loin.

Nous allons généraliser les relations développées plus haut :

---

31. - extrait traduit - op. cit. [7]

## Equation de Schrödinger à plusieurs particules

Nous considérons maintenant un système constitué de  $N$  particules en interaction, repérées par un indice inférieur  $i = 1, \dots, N$ . Le potentiel qui comprend les interactions est noté  $V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ . Un système à plusieurs particules est alors décrit par une fonction d'onde, dans l'espace de configuration de dimension  $3N$ , solution de l'équation de Schrödinger à plusieurs particules

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t)}{\partial t} = \left( \sum_{i=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m_i} \vec{\nabla}_i^2 + V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \right) \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t) \quad (224)$$

La condition initiale  $\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; 0)$  détermine  $\Psi$  à tous les autres instants  $t$ .

## Mécanique bohmiennne pour un système à plusieurs particules

La décomposition

$$\Psi = R e^{iS/\hbar} \quad (140)$$

fournit une équation de Hamilton-Jacobi à plusieurs particules

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{(\vec{\nabla}_i S)^2}{2m_i} + Q + V = 0 \quad (225)$$

et une équation de continuité à plusieurs particules

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i \cdot \left( \frac{R^2 \vec{\nabla}_i S}{m_i} \right) = 0 \quad (226)$$

Le potentiel quantique à plusieurs particules  $Q$  apparaissant dans (225) est donné par

$$Q = \sum_{i=1}^N \frac{-\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 R}{R} = \sum_{i=1}^N Q_i \quad (227)$$

Les potentiels  $V$  et  $Q$  introduisent des couplages entre les particules (et en particulier pour  $Q$ , toutes les particules).

Les équations (225) et (226) sont équivalentes à (224) en y ajoutant les conditions aux limites et les conditions initiales (une par particule).

La relation (165) découlant de ce que  $\Psi$  est univoque - ce qui n'est pas le cas de la décomposition (140) - devient

$$\sum_{i=1}^N \oint_C \vec{\nabla}_i S \cdot d\mathbf{x}_i = nh \quad (228)$$

dans laquelle  $n$  est un entier.

Les fonctions  $S$  et  $\vec{\nabla}_i S$  ne sont pas définies au droit des noeuds ( $R = 0$ ).



## Les trajectoires bohmienne pour un système à plusieurs particules

Les quantités de mouvement des particules sont données par

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t) = \vec{\nabla}_i S(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t) \quad (229)$$

qui conduit au champ de vitesses (en l'absence de champ magnétique) pour chaque particule  $i$

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \quad i = 1, \dots, N \quad (230)$$

La trajectoire bohmienne *dans l'espace de configuration* du point représentant le système est obtenue en intégrant le *système* à  $N$  équations différentielles couplées

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t) = \frac{1}{m_i} \vec{\nabla}_i S(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t)|_{\mathbf{x}_k=\mathbf{x}_k(t)} \quad i, k = 1, \dots, N \quad (231)$$

et ce, avec pour condition initiale les  $\mathbf{x}_i(0)$  de *toutes* les particules.

Du fait que  $\vec{\nabla}_i S, i = 1, \dots, N$  forment, à tout instant  $t$ , une fonction univoque de la position et du temps dans l'espace de configuration  $\mathbb{R}^{3N}$ , les trajectoires  $\mathbf{x}^j(t)$  du point représentant le système, issues de conditions initiales distinctes pour chacune des particules  $\{\mathbf{x}_i^j(0)\}$  ne se coupent pas à chaque instant  $t$ .

*Cependant*, pour une condition initiale dans  $\mathbb{R}^{3N}$ , les trajectoires individuelles de chacune des particules vont, en général, se croiser dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

De même que dans la théorie à une particule, les trajectoires dans l'espace de configuration ne peuvent traverser une ligne de noeud. Par suite, il en est de même pour les trajectoires individuelles des particules. Le potentiel effectif, somme du potentiel classique  $V$  et du potentiel quantique  $Q$  conduira à l'évitement des lignes de noeuds.

## 10.2 Factorisabilité, intrication et corrélations

Le potentiel classique  $V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t)$  et le potentiel quantique  $Q(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t)$  se distinguent dans la nature des corrélations qu'ils introduisent [29]. Le potentiel  $V$ , généralement, décroît avec le séparation des particules. Ce n'est pas le cas du potentiel quantique  $Q$  qui dépend de la forme de la fonction d'onde et n'est pas sensible à l'amplitude de cette dernière. Ainsi  $R$  et  $\alpha R$  produiront le même potentiel quantique.

$$Q_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\vec{\nabla}_i^2 R(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t)}{R(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\vec{\nabla}_i^2 \alpha R}{\alpha R} \quad (232)$$

L'interaction due au potentiel quantique peut ainsi rester significative même si les particules sont éloignées les unes des autres. Par ailleurs, pour le potentiel classique  $V$ , la vitesse de propagation des actions d'une particule sur une autre est limitée au cône de lumière. Ce n'est pas le cas pour  $Q$  qui permet de décrire des interactions non locales instantanées.

Considérons d'abord, le cas d'un système à deux particules dans lequel la fonction d'onde

est factorisable en le produit de deux termes<sup>32</sup> - ce qui implique l'indépendance des deux particules (!) -

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = \Psi_1(\mathbf{x}_1; t) \Psi_2(\mathbf{x}_2; t) \quad (233)$$

en posant,

$$\Psi_i(\mathbf{x}_i; t) = R_i(\mathbf{x}_i; t) e^{iS_i(\mathbf{x}_i; t)/\hbar} \quad i = 1, 2 \quad (234)$$

Nous avons immédiatement<sup>33</sup>

$$S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = S_1(\mathbf{x}_1) + S_2(\mathbf{x}_2) \quad (235)$$

$$R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = R_1(\mathbf{x}_1) R_2(\mathbf{x}_2) \quad (236)$$

Dans ce cas, nous avons individuellement pour chaque particule  $i$  une équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S_i(\mathbf{x}_i; t)}{\partial t} + \frac{1}{2m_i} \left( \frac{\partial S_i}{\partial x_i} \right)^2 + V(\mathbf{x}_i; t) + Q_i(\mathbf{x}_i; t) = 0 \quad (237)$$

une équation de continuité

$$\frac{\partial R_i^2(\mathbf{x}_i; t)}{\partial t} + \vec{\nabla}_i \cdot \left( \frac{1}{m_i} \vec{\nabla}_i S_i(\mathbf{x}_i; t) \right) R_i^2(\mathbf{x}_i; t) = 0 \quad (238)$$

Soit donc des équations indépendantes pour chacune des particules.

Considérons maintenant, le cas où la fonction d'onde commune s'exprime sous la forme de la somme de produits de fonctions d'onde<sup>34</sup>

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \psi_A(\mathbf{x}_1) \psi_B(\mathbf{x}_2) + \psi_C(\mathbf{x}_1) \psi_D(\mathbf{x}_2) \quad (239)$$

Lorsque  $\psi_A$  et  $\psi_C$  ou que  $\psi_B$  et  $\psi_D$  n'ont pas de support commun, alors (239) la fonction d'onde est *effectivement factorisable*<sup>35</sup> et se comporte comme

$$\psi = \psi_A(\mathbf{x}_1) \psi_B(\mathbf{x}_2) \quad \text{ou} \quad \psi = \psi_C(\mathbf{x}_1) \psi_D(\mathbf{x}_2) \quad (240)$$

car selon les valeurs de  $\mathbf{x}_1$  ou de  $\mathbf{x}_2$ , il ne restera qu'un terme dans la somme (239).

Avec (239), le module carré de l'amplitude présente un terme d'interférence

$$R^2 = R_A^2 R_B^2 + R_C^2 R_D^2 + 2R_A R_B R_C R_D \cos[(S_A + S_B - S_C - S_D)/\hbar] \quad (241)$$

Si la fonction d'onde n'est pas factorisable, le terme d'interférence de (241) montre la corrélation non locale c-à-d. l'intrication des particules 1 et 2.

32. immédiatement généralisable à plusieurs particules

33. sans exprimer explicitement la dépendance en  $t$  pour alléger les notations

34. sans écrire explicitement le facteur de normalisation

35. voir aussi (§ 11.1)

## 10.3 Les particules identiques

Deux particules discernables, *sans interaction ni corrélation*, étiquetées 1 et 2 sont représentées par une fonction d'onde

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \psi_A(\mathbf{x}_1)\psi_B(\mathbf{x}_2) \quad (242)$$

qui exprime que la particule 1 est dans l'état décrit par  $\psi_A$  et que la particule 2 est dans l'état décrit par  $\psi_B$ .

Considérons deux particules identiques : la particule 1 pourrait occuper l'état  $B$  et, réciproquement, la particule 2 pourrait occuper l'état  $A$  et comme les particules sont identiques, cette situation correspond au même état (242) et est représentée par une fonction d'onde pouvant seulement différer de la précédente par un facteur de phase. Ces deux permutations d'association particules-fonction d'onde sont alors décrites par la superposition des deux possibilités (243)

$$\Psi_\phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = N_\phi[\psi_A(\mathbf{x}_1)\psi_B(\mathbf{x}_2) + e^{i\phi}\psi_A(\mathbf{x}_2)\psi_B(\mathbf{x}_1)] \quad (243)$$

dans laquelle  $N_\phi$  est un facteur de normalisation.

Pour les bosons  $\Psi_+$ ,  $\phi = 0$  et la fonction d'onde est symétrique sous l'échange des particules tandis que pour les fermions  $\Psi_-$ ,  $\phi = \pi$  et la fonction d'onde est antisymétrique sous l'échange des particules. Cela conduit au principe d'exclusion de Pauli pour les fermions. Les particules identiques sont appelées "particules indiscernables" dans la présentation habituelle de la mécanique quantique. Dans la mécanique bohmienne, les particules sont toujours discernables *même lorsqu'elles sont identiques* et l'on peut suivre leurs trajectoires individuelles. Nous verrons cela plus loin dans les illustrations (§ 12).

## 10.4 La fonction d'onde conditionnelle

Nous avons en général besoin de pouvoir décrire la fonction d'onde d'un sous-système. Dans la mécanique bohmienne, on considère la fonction d'onde de l'Univers définie dans l'ensemble de configuration "total". Compte-tenu des effets non locaux résultant du potentiel quantique, on ne peut pas négliger l'action potentielle d'objets sous prétexte qu'ils sont lointains. On souhaite cependant pouvoir étudier une particule ou un système dans le cas pour lequel les effets d'autres systèmes sont négligeables ou n'interfèrent pas. C'est ici qu'intervient la fonction d'onde conditionnelle [28], [13] qui est la fonction d'onde d'un sous-système dans le contexte bohmien. La fonction d'onde conditionnelle intervient aussi, par ex., dans le cas de l'étude d'un "univers" constitué d'une particule et d'un équipement de mesure et qu'il est utile de considérer séparément l'un ou l'autre en tant que sous-systèmes formant un système global.

Pour fixer les idées, considérons d'abord le **modèle jouet** constitué d'un Univers comprenant deux particules. Les coordonnées de la première particule sont notées  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , celles de la seconde  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ . L'espace de configuration global est noté<sup>36</sup>  $C = C(\mathbf{X}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbb{R}^{3 \times 2} = \mathbb{R}^6$  et une trajectoire du point représentant l'Univers  $\mathbf{X}(t)$ . La fonction

---

36. Il est noté  $Q$  dans la littérature.

d'onde conditionnelle de la particule  $i$   $i = x, y$  est définie comme la fonction d'onde de cet univers  $\Psi$  évaluée aux positions réalisées ("actual") de l'autre particule<sup>37</sup>

$$\psi^x(\mathbf{x}; t) = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)} \quad (244)$$

$$\psi^y(\mathbf{y}; t) = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \quad (245)$$

Chacune des fonctions d'onde conditionnelles<sup>38</sup> est ainsi une fonction de  $\mathbb{R}^3$ .

Les trajectoires sont obtenues par intégration de (cf. (154))

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \frac{\hbar}{m_x} \operatorname{Im} \frac{\vec{\nabla}_{\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)}{\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = \frac{\hbar}{m_x} \operatorname{Im} \frac{\vec{\nabla}_{\mathbf{x}} \psi^x(\mathbf{x}; t)}{\psi^x(\mathbf{x}; t)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \frac{\hbar}{m_y} \operatorname{Im} \frac{\vec{\nabla}_{\mathbf{y}} \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)}{\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} = \frac{\hbar}{m_y} \operatorname{Im} \frac{\vec{\nabla}_{\mathbf{y}} \psi^y(\mathbf{y}; t)}{\psi^y(\mathbf{y}; t)} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(t)} \end{aligned} \quad (246)$$

Il est à noter que la trajectoire  $\mathbf{x}(t)$  du premier système dépend de "sa" condition initiale  $\mathbf{x}_0$  mais aussi de  $\mathbf{y}_0$  par l'intermédiaire de la réalisation considérée  $\mathbf{y}(t)$  du reste de l'Univers (et réciproquement pour le second système).

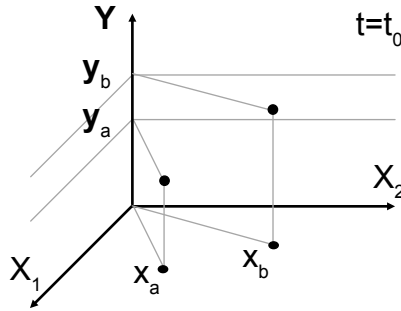


FIGURE 15 – Deux conditions initiales dans l'espace de configuration de l'Univers.

$(X_1, X_2)$  représente l'espace de configuration du système  $X$ ,

$\mathbf{Y}$  représente l'espace de configuration du reste de l'Univers.

Considérons maintenant le cas général de l'Univers, avec sa fonction d'onde  $\Psi$  (qui nous est inconnue), décomposé en un système  $X$ , d'espace de configuration  $C_X$  de dimension  $m$  et en le "reste de l'univers", noté  $Y$ , d'espace de configuration  $C_Y$  de dimension  $n$ , l'espace de configuration de l'Univers total se décompose en  $C(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ . Lors de la réalisation d'une condition initiale  $a$ , nous obtenons la trajectoire  $(\mathbf{X}_a(t), \mathbf{Y}_a(t))$ .

Par exemple, lors d'une expérience ou lors d'une mesure, le reste de l'Univers (ex. l'appareil de mesure et la chercheuse et le chercheur et le laboratoire et le reste de l'Univers à l'exclusion du système  $X$ ) suivra dans l'espace de configuration  $C_Y$  une trajectoire  $\mathbf{Y}_a(t)$

37. hors normalisation qui de toute façon disparaît dans l'intégration de la trajectoire (246)

38. Dans la littérature, il y a deux notations soit  $\psi^x$  pour indiquer que c'est la fonction d'onde conditionnelle du système  $x$  ou au contraire  $\psi^y$  pour indiquer les variables figées  $y$  (et variantes indices/exposants) !

tandis que le système  $X$  suivra dans son espace de configuration  $C_X$  une trajectoire  $\mathbf{X}_a(t)$ . Celle-ci est obtenue par l'intégration de<sup>39</sup>

$$\frac{dx_{a,i}}{dt} = \frac{\hbar}{m_X} \operatorname{Im} \frac{\partial_i \Psi(\mathbf{X}_a, \mathbf{Y}_a; t)}{\Psi(\mathbf{X}_a, \mathbf{Y}_a; t)} \Big|_{\mathbf{x}_a=\mathbf{x}_a(t), \mathbf{y}_a=\mathbf{y}_a(t)} \quad i = 1, \dots, m \quad (247)$$

La fonction d'onde conditionnelle, pour une trajectoire  $\mathbf{Y}_a$  du reste de l'Univers mais pour n'importe quelle condition initiale dans  $X$ , est définie en généralisant (246) par

$$\psi^{X|\mathbf{Y}_a}(\mathbf{X}; t) = \frac{\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_a; t)}{\|\Psi(\mathbf{Y}_a; t)\|} \quad (248)$$

avec la norme

$$\|\Psi(\mathbf{Y}_a; t)\| = \left[ \int |\Psi(x_1, \dots, x_m, \mathbf{Y}_a; t)|^2 dx_1 \dots dx_m \right]^{1/2} \quad (249)$$

Donc, pour obtenir, la fonction d'onde conditionnelle du système  $X$ , est la fonction d'onde de l'Univers évaluée à chaque instant pour la trajectoire "réelle"  $\mathbf{y}_a(t)$  du reste de l'Univers et normalisée par (249).

La définition (248) de la fonction d'onde conditionnelle permet de calculer la trajectoire du système  $X$  pour toute condition initiale particulière  $b$  de celui-ci  $((\mathbf{x}_b, \mathbf{y}_a), \forall \mathbf{x}_b)$ .

Nous allons voir que la fonction d'onde conditionnelle se révèle ainsi être une application des probabilités conditionnelles. Rappelons que la probabilité  $P(A|B)$  d'un évènement  $A$  sous la condition qu'un évènement  $B$  soit réalisé est obtenue par

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (250)$$

En introduisant, grâce à la fonction d'onde, une densité de probabilité, nous avons

$$\begin{aligned} P^\Psi(q = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}_a) \text{ avec } \mathbf{X} \in dx_1 \dots dx_m \mid \mathbf{Y}_a) &= \frac{|\Psi(x_1, \dots, x_m, \mathbf{Y}_a; t)|^2 dx_1 \dots dx_m}{\int |\Psi(x_1, \dots, x_m, \mathbf{Y}_a; t)|^2 dx_1 \dots dx_m} \quad (251) \\ &= \psi^{X|\mathbf{Y}_a}(\mathbf{X}; t) dx_1 \dots dx_m \quad (252) \end{aligned}$$

Il reste le problème que  $\mathbf{Y}_a(t)$  (c-à-d. *tout bonnement* la trajectoire dans son espace de configuration du restant de l'Univers) est inconnue!

---

39. Il faudrait bien entendu aussi intégrer la trajectoire  $\mathbf{T}_a(t)$

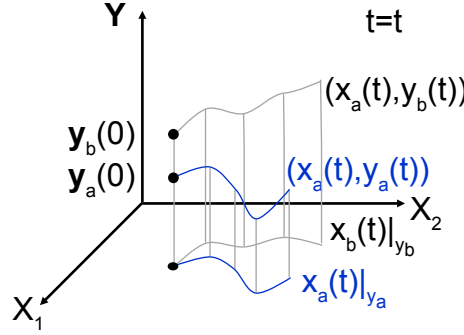


FIGURE 16 – Deux trajectoires dans l’espace de configuration de l’Univers.  
La trajectoire du système  $X$  est sensible à l’évolution du reste de l’Univers  
et est donc aléatoire.

Dans le cas de la figure fig. 16, la fonction d’onde du système n’évolue pas en suivant une équation de Schrödinger propre et est aléatoire.

C’est ici qu’intervient le postulat de l’équilibre quantique (§ 8.2).

Lemme :

Si  $B = \bigcup_i B_i$  avec  $B_i \cap B_j = \emptyset$  quand  $i \neq j$  ( $B$  est la réunion des  $B_j$  disjoints deux à deux), et si  $P(A|B_i) = a, \forall B_i$

alors,

$$\sum_i P(A|B_i)P(B_i) = aP(\bigcup_i B_i) = a P(B)$$

et

$$\sum_i P(A|B_i)P(B_i) = \sum_i P(A \cap B_i) = P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

et donc

$$P(A|B) = a$$

Nous considérons maintenant toutes les configurations  $\mathbf{Y}_a$  du reste de l’Univers qui conduisent à la même fonction d’onde conditionnelle  $\psi^{X|\mathbf{Y}_a}$  que nous noterons simplement  $\psi$  puisque ne dépendant plus de l’ensemble des  $\mathbf{Y}_a$  considérés fig. 17. En appliquant le lemme précédant à la réunion  $\mathbb{Y}$  de celles-ci, nous obtenons

$$P^\Psi(q = (\mathbf{x}, \mathbb{Y}) \text{ avec } \mathbf{x} \in dx_1 \dots dx_m \mid \mathbb{Y}) = \psi(\mathbf{x}; t) dx_1 \dots dx_m \quad (253)$$

Le second postulat est l’hypothèse qu’à l’équilibre, les configurations appartenant à  $\mathbb{Y}$ <sup>40</sup> sont typiques et qu’ainsi un sous-système peut avoir sa fonction d’onde propre (voir aussi § 11.1). Cela qui est soutenu par le fait que la règle de Born correspond à ce qui est observé lors des expériences. Le système  $X$  ayant une fonction d’onde satisfaisant à une

<sup>40</sup>. La forme donnée à  $\mathbb{Y}$  dans la figure fig. 17 est purement illustrative, elle ne présume pas de la topologie réelle de cet ensemble.

équation de Schrödinger propre, possède des trajectoires bohmiennes correspondant aux différentes conditions initiales qu'il peut rencontrer <sup>41</sup>.

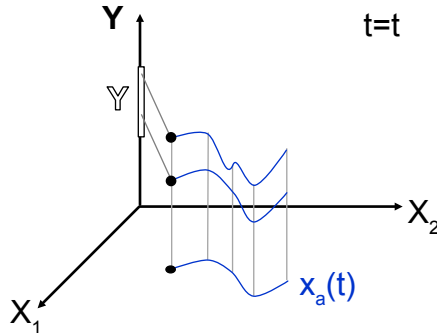


FIGURE 17 – Deux trajectoires dans l'espace de configuration de l'Univers

La trajectoire du système  $X$  ne dépend pas de l'évolution du reste de l'Univers en se restreignant à  $\mathbb{Y}$

Cette indépendance du sous-système avec le reste de l'Univers n'est évidemment valide que pour une certaine durée  $\tau$  (avant qu'une interaction ne se produise finalement ex. décohérence).

## 11 Les mesures

### 11.1 La fonction d'onde effective

Comme précédemment, soit  $\Psi$  la fonction d'onde de l'Univers et décomposons l'espace de configuration associé en  $C(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$  [12] correspondant aux variables d'un système  $X$  et à celles du reste de l'Univers  $Y$ . A une configuration  $a$  effectivement réalisée, correspond la trajectoire  $(\mathbf{X}_a(t), \mathbf{Y}_a(t))$ . Le système  $X$  peut aussi lui-même être partitionné en un sous-système  $sys$  et un appareil de mesure  $app$ . Les  $m$  degrés de liberté  $\mathbf{x}$  du système  $X$  sont alors aussi décomposés à leur tour en  $(\mathbf{X}_{sys}, \mathbf{X}_{app})$ . Le système  $X$  pourrait avoir une fonction d'onde propre si, par exemple, il était possible de factoriser la fonction d'onde de l'Univers en

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; t) = \psi(\mathbf{X}; t)\phi(\mathbf{Y}; t) \quad (254)$$

Alors, la vitesse du point représentatif de l'évolution de l'Univers dans l'espace de configuration verrait aussi ses composantes se décomposer en

$$\mathbf{v}^\Psi = (\mathbf{v}^\psi, \mathbf{v}^\phi)$$

---

41. Ce point justifie la légitimité de la réalisation d'expériences à des instants différents et qui aboutissent à des résultats cohérents.

Tant que la relation (254) est d'application, c-à-d. tant qu'il n'y a pas de terme de couplage du type  $V(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  dans l'hamiltonien qui peut, dès lors, s'écrire à son tour

$$\hat{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; t) = \hat{H}_X(\mathbf{X}; t) + \hat{H}_Y(\mathbf{Y}; t) \quad (255)$$

et le système  $X$  évolue selon une équation de Schrödinger propre

$$i\hbar \frac{d\Psi(\mathbf{X}; t)}{dt} = \hat{H}_X(\mathbf{X}; t)\psi(\mathbf{X}; t) \quad (256)$$

La factorisation (254) est irréaliste et est détruite suite aux interactions entre le système et le reste de l'environnement qui finissent toujours par se produire. Il suffit de penser au cas où est réalisée une mesure : un instrument de mesure macroscopique ne peut être construit pour rester découplé de l'environnement pendant un temps sensible conduisant (254) à être, d'une façon plus réaliste, une somme de termes produits traduisant l'intrication du système avec l'Univers.

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; t) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{X}; t)\phi_{\alpha}(\mathbf{Y}; t) \quad (257)$$

Nous allons considérer une autre décomposition

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; t) = \Psi^1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; t) + \Psi^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; t) \quad (258)$$

dans laquelle, les fonctions d'onde  $\Psi^1$  et  $\Psi^2$  ont avec une bonne approximation des supports disjoints. Nous imaginons aussi que la séparation de ces supports est suffisamment grande pour qu'elle perdure pendant une durée suffisamment appréciable  $\tau$  qui permet de traiter la vitesse du point représentatif de l'évolution de l'Univers  $q = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  comme étant donnée par

$$\mathbf{v}^{\Psi} = \mathbf{v}^{\Psi^i} \quad (259)$$

lorsque  $q$  est initialement uniquement dans le support de  $\Psi^i$  et, dès lors, pas dans celui de  $\Psi^j, i \neq j$  et que cette situation perdure pendant l'intervalle de temps  $\tau$  pendant lequel les supports continuent à être disjoints.

Considérons maintenant que l'on se trouve dans une situation où (257) peut être mis sous la forme

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; t) = \psi_{\alpha_0}(\mathbf{X}; t)\phi_{\alpha_0}(\mathbf{Y}; t) + \sum_{\alpha \neq \alpha_0} \psi_{\alpha}(\mathbf{X}; t)\phi_{\alpha}(\mathbf{Y}; t) \quad (260)$$

pour laquelle le premier terme du second membre,  $\psi_{\alpha}(\mathbf{X}; t)\phi_{\alpha} = \psi_{\alpha}(\mathbf{X}; t)\phi_{\alpha_0}$ , a pendant une durée  $\tau$  un support disjoint du second terme de cette somme,  $\psi^{\perp} = \sum_{\alpha \neq \alpha_0} \psi_{\alpha}(\mathbf{X}; t)\phi_{\alpha}(\mathbf{Y}; t)$ . Avec ces notations, nous dirons que le système  $X$  a une **fonction d'onde effective**  $\psi$  durant l'intervalle de temps  $\tau$ , si la fonction d'onde de l'Univers peut s'écrire

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; t) = \psi(\mathbf{X}; t)\phi(\mathbf{Y}; t) + \psi^{\perp}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; t) \quad (261)$$

avec  $\mathbf{y} \in \text{Supp}(\phi)$  <sup>42</sup>

Cette définition rejoint celle de la fonction d'onde conditionnelle (§ 10.4).

---

42. support de  $\phi$



## 11.2 Les mesures en mécanique bohmienne

Compte-tenu de ce qui a été discuté dans les paragraphes précédents (§§ 10.4 et 11.1, nous allons considérer un univers composé uniquement du système  $X$  à mesurer et de l'appareil de mesure  $Y$  [13], [18].

D'une façon générale, un appareil de mesure possède un indicateur repéré par une variable  $y$  et décrit par une fonction d'onde  $\phi(y)$ , elle-même décomposée en une somme de "composantes"  $\phi_j(y)$ , chacune correspondant, de façon biunivoque, à une valeur de la mesure. L'appareil de mesure est ainsi construit de sorte que les composantes  $\phi_j(y)$  aient des supports macroscopiquement disjoints deux à deux,  $\text{Supp}(\phi_i) \cap \text{Supp}(\phi_j) = \emptyset$ ,  $i \neq j$  afin que les résultats des mesures soient parfaitement distinguables<sup>43</sup> (elles peuvent correspondre à des positions séparées de l'aiguille de l'appareil).

Supposons qu'avant l'interaction avec l'appareil de mesure, l'état du système  $X$  soit décrit par la superposition

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_k c_k \psi_k(\mathbf{x}) \quad (262)$$

dans laquelle les  $\psi_k(\mathbf{x})$  sont les fonctions propres d'un opérateur  $\hat{A}$  de valeurs propres  $a_k$  qu'il est souhaité de mesurer.

Un appareil de mesure dédié à mesurer "l'observable"  $\hat{A}$  est fabriqué pour réaliser un couplage avec le système  $X$  qui va séparer les supports des composantes  $\psi_k(\mathbf{x})$  de sorte qu'après l'interaction de mesure, l'univers (système  $X$ , appareil  $Y$ ) soit représenté par la fonction d'onde effective (261)

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \psi_a(\mathbf{x}; t) \phi_a(\mathbf{y}; t) + \psi^\perp(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) \quad (263)$$

signifiant<sup>44</sup> que la position de l'indicateur est celle correspondant à la valeur  $a$  et, dans la mécanique bohmienne, que la décomposition de  $\psi^\perp$  ne contient plus que des fonctions d'onde vides  $\psi_b$ ,  $b \neq a$ .

*Il n'y a aucun effondrement de la fonction d'onde suite à une mesure et tout le processus se déroule selon une évolution unitaire !*

Dans les situations habituelles, les supports des fonctions d'onde  $\psi_b$  continueront à toujours rester séparés de celui de  $\psi_a$ . D'un point de vue pratique,  $\psi_a$  est alors la fonction d'onde du système  $X$  après mesure comme dans l'interprétation standard de la mécanique quantique.

Voyons cela en détail [18].

Soit  $\psi(\mathbf{x}; t)$  la fonction d'onde décrivant le système  $X$  à une particule pour laquelle nous souhaitons étudier une propriété associée à un opérateur  $\hat{A}$ , au moyen de sa valeur moyenne locale  $A_B(\mathbf{x})$  (199)

$$A_B(x, t) = \text{Real} \left( \left[ \frac{\psi^*(x, t) \hat{A}(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x, t)}{\psi^*(x, t) \psi(x, t)} \right] \right) = \frac{\text{Real} \left( \psi^*(\mathbf{x}, t) \hat{A}_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}} \psi(\mathbf{x}, t) \right)}{|\psi(\mathbf{x}, t)|^2}$$

43. Le fait que les supports des  $\phi_j$  soient distincts implique qu'il n'y a aucun terme interférence ( $\phi_i(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x}$ ) entre les différentes positions de l'indicateur *que l'on l'observe ou non !*

44. L'indice  $a$  est maintenant la valeur propre.

évaluée le long de la trajectoire  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  de la particule .

Au départ  $t = t_0$ , l'espérance mathématique est donnée par

$$A_{B0}(\mathbf{x}_0) = \frac{\text{Real} \left( \psi^*(\mathbf{x}, t_0) \hat{A}_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}} \psi(\mathbf{x}, t_0) \right)}{|\psi(\mathbf{x}, t_0)|^2} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t_0)} = \frac{\text{Real} \left( \psi_0^*(\mathbf{x}) \hat{A}_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}} \psi_0(\mathbf{x}) \right)}{|\psi_0(\mathbf{x})|^2} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (264)$$

Le système interagit avec un appareil pour lequel la position de l'aiguille est repérée par une variable continue  $y$  qui dépend de la position initiale de l'aiguille. A l'instant initial  $t_0$ , cette aiguille se trouve en  $y_0$  et nous notons  $y(t, y_0)$  l'évolution temporelle de sa position. En  $t = t_0$ , l'appareil est décrit par la fonction d'onde  $\phi_0(y)$  qui est concentrée autour de  $y_0$ .

L'interaction entre l'appareil de mesure et le système  $X$  aura une durée  $T$  suffisamment courte pour toute évolution propre tant du système que de l'appareil puisse être négligée. Cette interaction est décrite par l'hamiltonien

$$\hat{H} = g \hat{A} \hat{p}_y \quad (265)$$

où  $g$  est une constante représentant l'intensité du couplage et  $\hat{p}_y$  est le moment conjugué à  $y$  (la quantité de mouvement)<sup>45</sup>. Il est supposé que les autres termes de l'hamiltonien (comme les énergies cinétiques) sont négligeables durant l'interaction tant pour le système que pour l'appareil de mesure qui ne comprend, dès lors, que le terme de couplage.

Comme

$$[\hat{A}, \hat{H}] = 0$$

cette interaction est telle qu'elle ne modifie pas la grandeur mesurée et donc que la mesure est reproductible.

Initialement, le système et l'appareil de mesure sont supposés indépendants et la fonction d'onde de cet univers a la forme du produit

$$\Psi_0(\mathbf{x}, y) = \psi_0(\mathbf{x}) \phi_0(y) \quad (266)$$

L'équation de Schrödinger décrivant l'interaction est

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, y; t)}{\partial t} = -i\hbar g \hat{A} \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, y; t)}{\partial y} \quad (267)$$

On décompose alors  $\Psi(\mathbf{x}, y; t)$  en fonctions propres de  $\hat{A}$ <sup>46</sup> ( $\hat{A}\psi_a(\mathbf{x}) = a \psi_a(\mathbf{x})$ )

$$\Psi(\mathbf{x}, y; t) = \sum_a f_a(y, t) \psi_a(\mathbf{x}) \quad (268)$$

Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_a f_a(y, t) \psi_a(\mathbf{x}) = -g \hat{A} \frac{\partial}{\partial y} \sum_a f_a(y, t) \psi_a(\mathbf{x})$$

que l'on peut traiter terme à terme compte-tenu de l'orthogonalité des fonctions propres. Soit

$$\partial_t f_a(y, t) = -g a \partial_y f_a(y, t)$$

45. Pour l'expérience de Stern et Gerlach, le couplage se fait avec  $\hat{y}$  au lieu de  $\hat{p}_y$

46.  $\hat{A} \otimes \hat{I}$

qui admet une solution de la forme  $f(y - gat)$  puisque

$$\frac{\partial f(y - gat)}{\partial t} = \frac{\partial f(y - gat)}{\partial(y - gat)} \frac{\partial(y - gat)}{\partial t} = -ga \frac{\partial f(y - gat)}{\partial(y - gat)}$$

et

$$\frac{\partial f(y - gat)}{\partial y} = \frac{\partial f(y - gat)}{\partial(y - gat)} \frac{\partial(y - gat)}{\partial y} = \frac{\partial f(y - gat)}{\partial(y - gat)}$$

On a à la fin de l'interaction

$$f_a(y, T) = f_{a0}(y - ga T) \quad (269)$$

avec  $f_{a0}(y) = f_a(y, 0)$  en début de celle-ci ( $t_0 = 0$ ).

Nous développons  $\psi_0(\mathbf{x})$  sur la base  $\{\psi_a(\mathbf{x})\}$  en

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \sum_a c_a \psi_a(\mathbf{x}) \quad (270)$$

où les  $c_a$  sont des constantes.

Dès lors, en  $t = 0$ , les relations (266) et (268) donnent avec (270)

$$\sum_a c_a \psi_a(\mathbf{x}) \phi_0(y) = \sum_a f_a(y, 0) \psi_a(\mathbf{x}) = \sum_a f_{a0}(y) \psi_a(\mathbf{x})$$

qui nous permet, compte-tenu de l'orthogonalité des  $\psi_a$  d'identifier

$$f_{a0}(y) = c_a \phi_0(y)$$

La fonction d'onde de l'univers est ainsi, en fin d'interaction, donnée par

$$\Psi(\mathbf{x}, y; T) = \sum_a c_a \psi_a(\mathbf{x}) \phi_0(y - ga T) \quad (271)$$

et, par la suite, elle évolue comme celle d'un système libre.

Cette fonction d'onde n'est pas factorisable.

Le point représentatif du système et de l'appareil  $(\mathbf{x}, y)$  a subi, dans l'espace de configuration, une trajectoire compliquée pendant l'interaction. Pendant celle-ci, le paquet d'ondes initial de l'aiguille  $\phi_0$  a évolué en se décomposant en différents paquets d'ondes  $\phi_{0a}$  dont les centres ont suivi des trajectoires  $y_a = ga t$  de sorte qu'après la fin d'interaction, pour des valeurs voisines des valeurs propres  $a$  et  $a + \delta a$ , les centres des paquets d'onde correspondants se sont retrouvés séparés de  $\delta y_a = gT \delta a$ . La force et la durée de l'interaction sont choisies de sorte que leurs supports respectifs soient disjoints, ce qui a conduit les  $\phi_a$  à devenir orthogonaux entre eux. Leurs subséquentes évolutions libres les conduisent à avoir des séparations macroscopiques *dans l'espace de configuration*.

La fonction d'onde de l'univers (271) peut alors être, *pour ce qui concerne la dynamique de la particule*, remplacée par la fonction d'onde effective ne comprenant que le terme unique correspondant à la valeur observée  $a$

$$\Psi \rightarrow c_a \psi_a(\mathbf{x}) \phi_{0a}(y - ga T) \quad (272)$$

Cette séparation et cette sélection se sont déroulées que l'appareil de mesure soit observé ou non. L'évolution de cet univers a suivi l'équation de Schrödinger et il n'y a pas eu besoin d'invoquer un soudain effondrement de la fonction d'onde.

Quand l'interaction avec l'appareil de mesure est terminée, le calcul de la valeur moyenne locale (199) de l'opérateur  $\hat{A}_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}}$  se réduit au seul terme

$$\hat{A} \rightarrow a = \frac{\text{Re} \left( \psi_a^*(\mathbf{x}, t) (\hat{A} \psi_a)(\mathbf{x}, t) \right)}{|\psi_a(\mathbf{x}, t)|^2}$$

c-à-d qu'une "mesure"  $a$  est associée à chacun des paquets d'onde.

Cette valeur n'est pas l'espérance mathématique avant mesure (264) sauf dans le cas où la décomposition (262) avant mesure ne comportait que le seul terme comprenant la fonction propre  $\psi_a$ . Dans le même ordre d'idée, si la mesure est répétée, elle produira le même résultat.

L'interaction de l'appareil de mesure avec l'environnement rend irréversible le processus de mesure.

Troisième partie

Illustrations détaillées



## 12 Les particules identiques : Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein et Fermi-Dirac

Ce chapitre adapte des éléments du travail de Dr. Chris Dewdney et Al. [10], [3] aussi repris dans [18].

Les particules identiques<sup>47</sup> ont été brièvement introduites au paragraphe § 10.3.

### Généralités

En se rappelant que dans la mécanique bohémienne, les particules sont toujours distinguables, nous allons approfondir les mouvements pilotés par des fonctions d'onde correspondant aux trois statistiques :

1. Maxwell-Boltzmann (*MB*) correspondant à deux particules sans interaction ni corrélation représentées par le produit de leurs fonctions d'onde

$$\psi_{MB}(x_1, x_2) = \psi_A(x_1)\psi_B(x_2) \quad (273)$$

2. Bose-Einstein (*BE*) correspondant à deux particules dont la corrélation est exprimée par une fonction d'onde symétrique sous la permutation des particules

$$\psi_{BE}(x_1, x_2) = N_{BE} (\psi_A(x_1)\psi_B(x_2) + \psi_A(x_2)\psi_B(x_1)) \quad (274)$$

3. Fermi-Dirac (*FD*) correspondant à deux particules dont la corrélation est exprimée par une fonction d'onde antisymétrique sous la permutation des particules

$$\psi_{FD}(x_1, x_2) = N_{FD} (\psi_A(x_1)\psi_B(x_2) - \psi_A(x_2)\psi_B(x_1)) \quad (275)$$

et ce, dans le cas d'un système composé de deux oscillateurs harmoniques sans interaction, de même masse et de même fréquence. Cette situation est décrite par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x_1, x_2; t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x_2^2 \right) \psi(x_1, x_2; t) \quad (276)$$

Comme le potentiel extérieur est une fonction additive, il est possible d'en construire des solutions au départ de deux fonctions à une particule avec

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1(x_1; t)}{\partial t} &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_1^2 \right) \psi_1(x_1; t) \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2(x_2; t)}{\partial t} &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_2^2 \right) \psi_2(x_2; t) \end{aligned}$$

Nous en construisons deux paquets d'ondes gaussiens non dispersifs et oscillants, initialement centrés sur les points  $x = \pm a$  (voir [37] pages 66 et suivantes pour le détail des calculs de l'oscillateur harmonique quantique)

$$\begin{aligned} \psi_{A/B}(x; t) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{m\omega}{2\hbar} \right) (x \pm a \cos \omega t)^2 \right] \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \left[ \omega t + \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right) (\pm 2xa \sin \omega t - \frac{1}{2} a^2 \sin 2\omega t) \right] \right\} \end{aligned} \quad (277)$$

---

47. undistinguishables

de largeur  $\Delta x = (\hbar/2m\omega)^{1/2}$  et initialement respectivement en  $x_{1/2} = \pm a$ . Nous pouvons ainsi suivre les trajectoires bohmiennes de particules pour différents  $x$  initiaux.

## Maxwell-Boltzmann

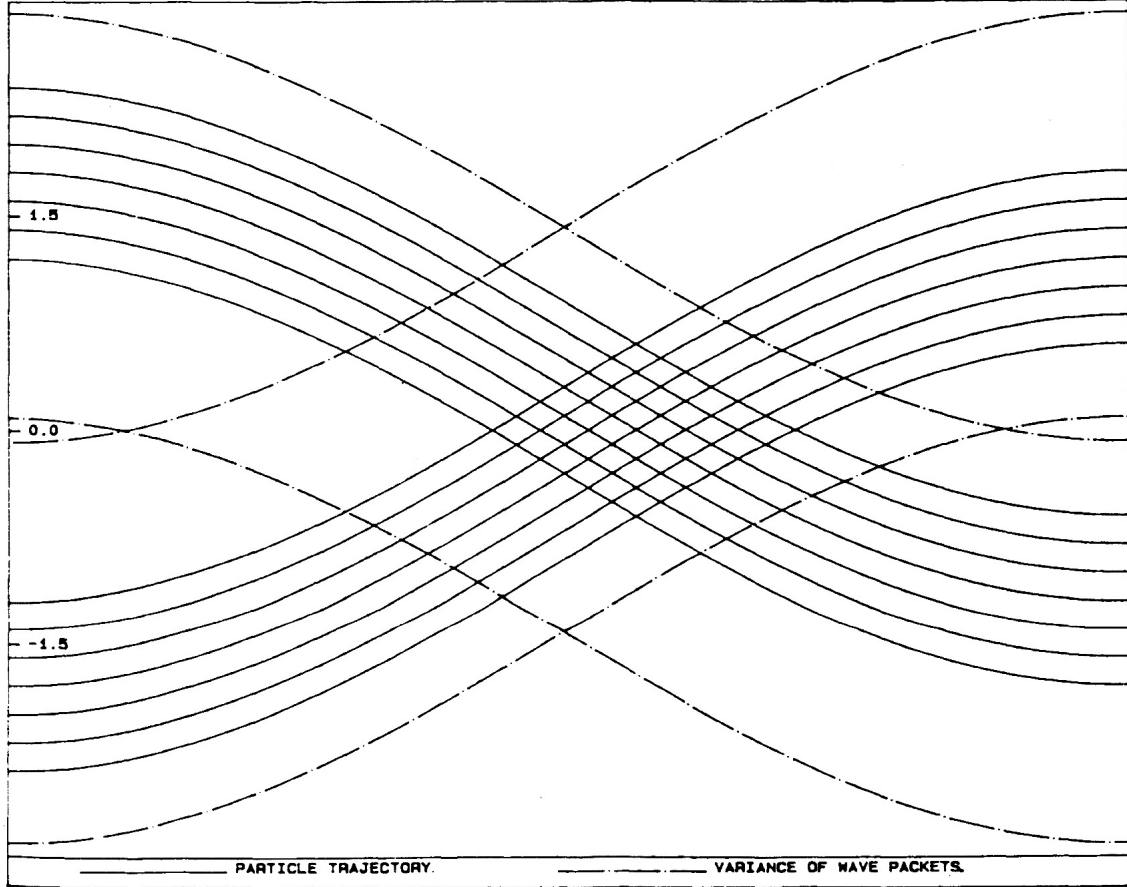


FIGURE 18 – Trajectoires pour des particules de deux oscillateurs harmoniques de fonction d'onde factorisable (Maxwell-Boltzmann). Les lignes en pointillé montre les variances des oscillateurs individuels. La position initiale de la particule 1(2) n'a d'importance que pour son mouvement

source de l'illustration [3]

-illustration utilisée à des fins d'enseignement dans le cadre d'une activité non-commerciale et bénévole-

Pour le paquet d'ondes gaussien  $A$  (pour  $B$  remplacer  $a$  par  $-a$ ), on trouve [18]

$$R_A^2 = |\psi_A(x; t)|^2 = |\psi_0(x - a \cos \omega t)|^2 \quad (278)$$

et

$$S_A(x; t) = -\frac{1}{2}\hbar\omega t - \frac{1}{2}m\omega(2xa \sin \omega t - \frac{1}{2}a^2 \sin 2\omega t) \quad (279)$$

Les trajectoires sont données par

$$m\dot{x} = \frac{\partial S_A}{\partial x} = -m\omega a \sin \omega t \quad (280)$$



c.-à-d.

$$x(t) = x_0 + a(\cos \omega t - 1) \quad (281)$$

Les positions initiales des centres des paquets d'ondes sont  $x_{1/2} = \pm 1.5$ .

Nous voyons, sur la figure( fig. 18) que les particules 1 et 2 décrivent des trajectoires respectives qui dépendent pour chacune de sa position initiale propre sans que l'autre particule ne l'influence d'aucune façon.

## Bose-Einstein

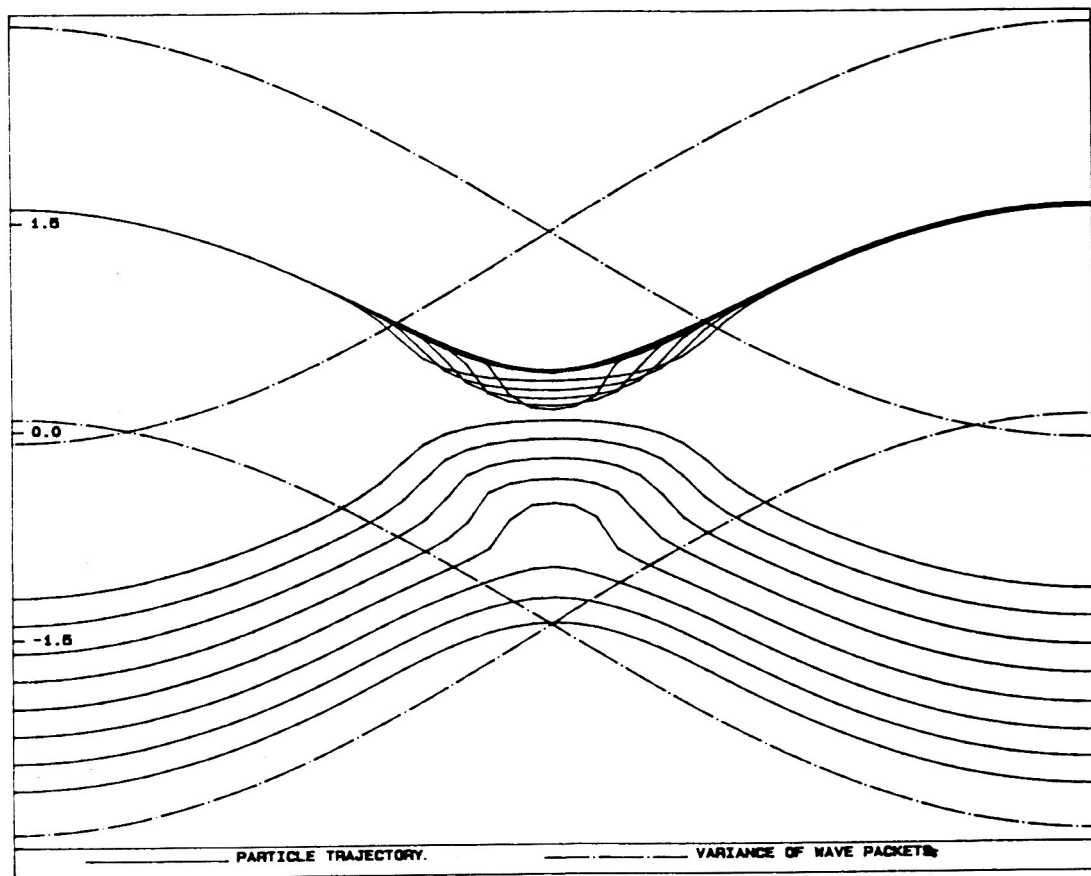


FIGURE 19 – Trajectoires corrélées deux à deux de particules pour une fonction d'onde symétrique (Bose-Einstein) à deux particules chacune "appartenant à son oscillateur". La position initiale de la particule 1 est la même pour chacune des positions initiales de la particule 2. Les lignes pleines sont les trajectoires des particules et les lignes en pointillé montrent les variances des oscillateurs individuels.

source de l'illustration [3]

-illustration utilisée à des fins d'enseignement dans le cadre d'une activité non-commerciale et bénévole-

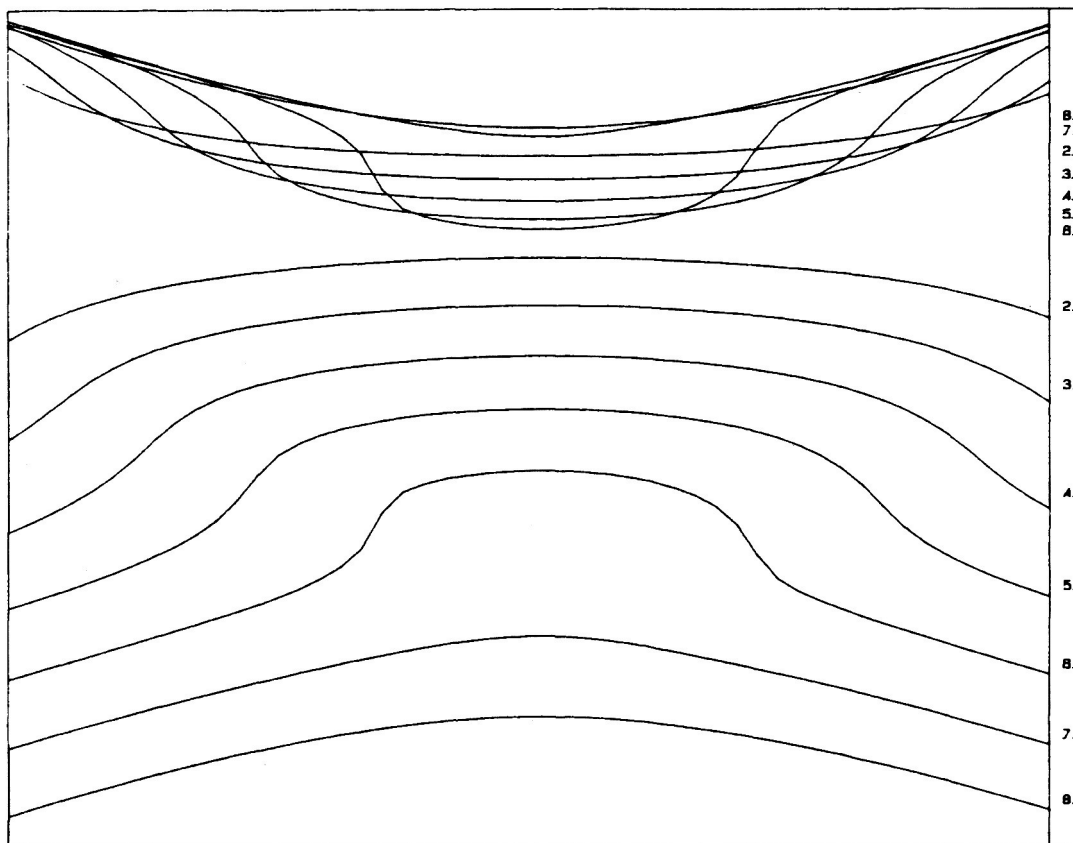


FIGURE 20 – Zoom dans la région de recouvrement sur les trajectoires corrélées deux à deux de deux particules pour une fonction d'onde symétrique (Bose-Einstein) à deux particules chacune "appartenant à son oscillateur". La numérotation des trajectoires pour la particule "du dessus" correspond à l'ordonnancement au centre du tracé.  
source de l'illustration [3]

-illustration utilisée à des fins d'enseignement dans le cadre d'une activité non-commerciale et bénévole-

L'analyse montre que les forces agissant sur les particules sont telles qu'elles tendent initialement à rapprocher les particules sauf dans le région de recouvrement où elles sont *répulsives*.

## Fermi-Dirac

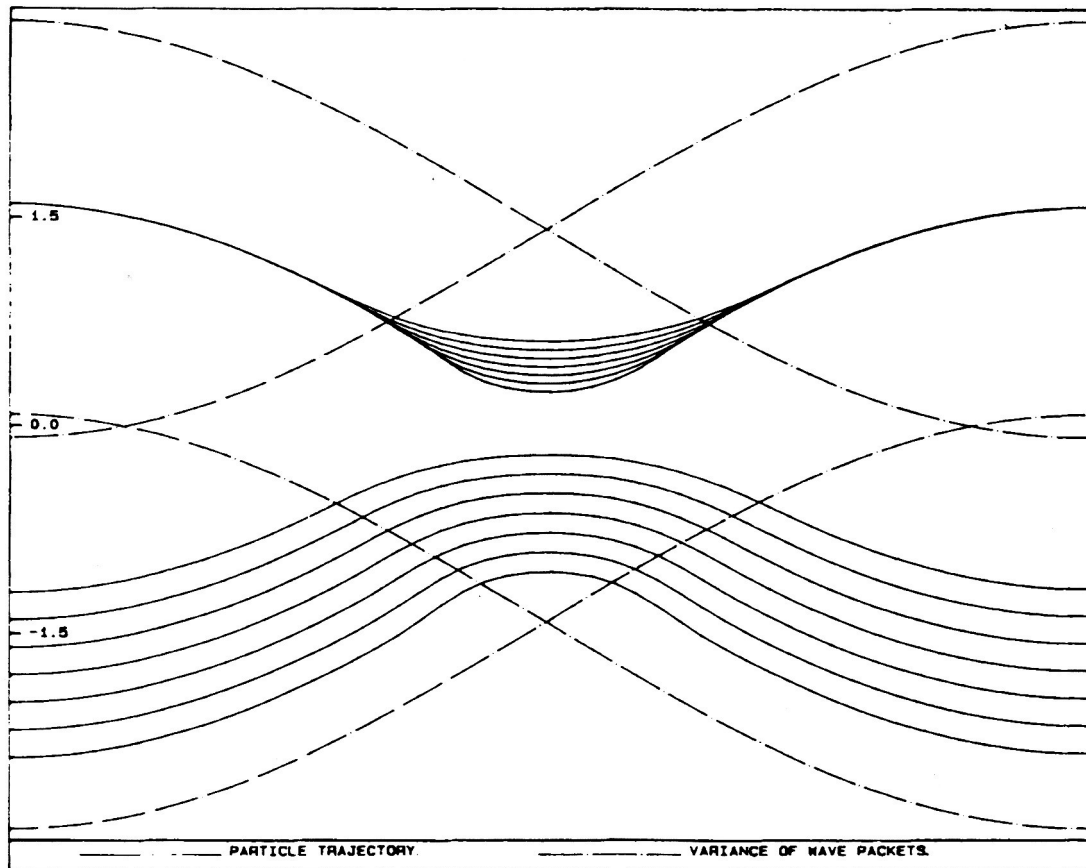


FIGURE 21 – Zoom dans la région de recouvrement sur les trajectoires corrélées deux à deux de deux particules pour une fonction d'onde antisymétrique (Fermi-Dirac) à deux particules chacune "appartenant à son oscillateur". Les lignes pleines sont les trajectoires des particules et les lignes en pointillé montrent les variances des oscillateurs individuels. source de l'illustration [3]

-illustration utilisée à des fins d'enseignement dans le cadre d'une activité non-commerciale et bénévole-

L'analyse montre que les forces agissant sur les particules sont telles qu'elles tendent initialement à rapprocher les particules sauf dans la région de recouvrement où elles sont répulsives mais *moins* que dans le cas BE.

## Comparaison MB-BE-FD

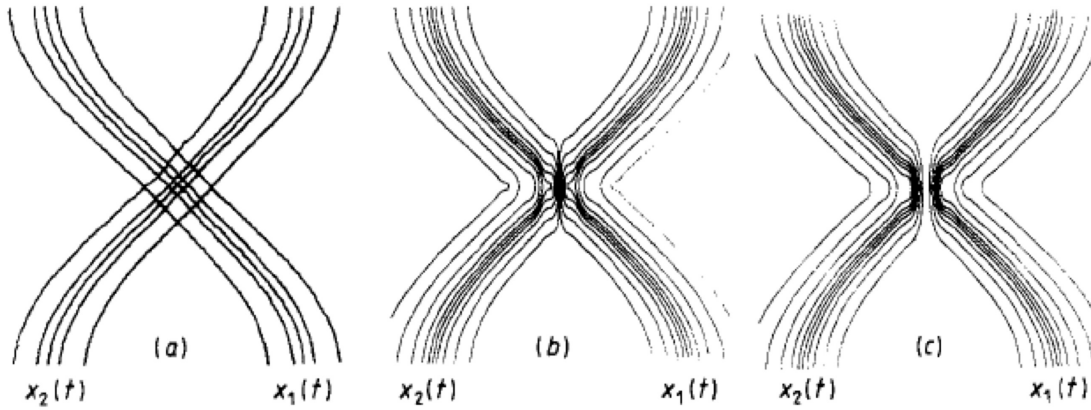


FIGURE 22 – Ensembles de trajectoires à deux particules avec des positions initiales  $x_2(0) = -x_1(0)$  a) Maxwell-Boltzmann, b) Fermi-Dirac, c) Bose-Einstein source de l'illustration [10]

-illustration utilisée à des fins d'enseignement dans le cadre d'une activité non-commerciale et bénévole-

Il n'est pas vrai que, pour une condition initiale donnée, une paire de trajectoires se rapprochent *toujours* plus dans le cas BE que dans le cas MB.

La figure (fig. 22) montre que

1. Les particules de statistique MB étant indépendantes possèdent des trajectoires qui se coupent. Elles se propagent sans se perturber l'une et l'autre et ne forment pas d'interférence.
2. Les particules de statistique BE ou FD ont des trajectoires qui ne se croisent pas mais qui forment des motifs d'interférence et sont *en moyenne* plus proches les unes des autres dans le cas BE que dans le cas FD.

## 13 Les trajectoires bohmienne à une particule

### 13.1 Le second postulat

Ce chapitre adapte des éléments du travail de "Dr. Antony Valentini et Dr. Hans Westman" [43] (autre référence utilisée [6]).

### Un modèle 2D

Nous revenons sur le second postulat (§ 8.2) en utilisant un modèle 2D qui permet de visualiser les trajectoires. Il s'agit d'un système de masse unité et d'espace de configuration  $(x, y)$  se déplaçant sous un potentiel  $V$  représentant une boîte bidimensionnelle. L'équation